BOURBAKI
FINANZAS

...el mercado binomial en un periodo

Contents

01 Introducción — pág. 01

02 Estrategias de inversión en un mercado binomial — pág. 02
- 01 El modelo de mercado — pág. 02
- 02 Portafolios — pág. 02
- 03 Opciones europeas — pág. 03
- 04 Replicación — pág. 03
- 05 Costo de la estrategia que replica al contrato Φ. — pág. 04

03 Ejemplo. Tesla — pág. 05
- 01 Parámetros — pág. 05
- 02 Incremento en el precio. Mercado Bull — pág. 05
- 03 Decremento en el precio. Mercado Bear — pág. 06

01 Introducción

Estas son unas notas creadas por Gerardo Hernández del Valle, director de Bourbaki Finanzas, con el objetivo de exponer dos problemas fundamentales de las matemáticas financieras, a saber:

- La valuación de opciones europeas
- La estrategia de cobertura utilizada para construir un portafolio que replique el valor de la opciòn europea

Por motivos de exposición únicamente hablaremos de un mercado con dos tiempos (presente y futuro) en el que solo tenemos dos activos posibles, uno con riesgo llamado activo subyacente S mientras que el otro no tiene riesgo y llamado bono B.

Usando el modelo binomial el cual en este caso se puede resolver fácilmente a travès de un sistema de ecuaciones lineales, encontramos tanto el valor de la opción europea en el tiempo cero, asì como el monto necesario en los activos B y S que permitan construir el portafolio replicador.

Para fijar ideas en el segundo capítulo daremos un ejemplo numérico suponiendo que S es el precio de las acciones de Tesla y B es un bono con rendimiento R en el periodo.

A los lectores interesados les recomendamos continuar aprendiendo sobre esta apasionante teoría de los productos derivados, en particular los siguientes temas son excelentes continuaciones:

- El modelo binomial en el caso general
- La ecuación de Black-Scholes
- La valuación mediante el método de Monte Carlo

Bourbaki finanzas ofrece un curso sobre estos temas llamado Derivatives for the working financier, pueden consultar los detalles en este link

02 Estrategias de inversión en un mercado binomial

Comencemos con el siguiente problema: supongamos que tenemos un activo financiero S cuyo precio en la actualidad es s. En particular, deseamos reducir el riesgo derivado de la incertidumbre en el precio futuro del activo.

Las opciones europeas son contratos que permiten reducir dicho riesgo. Un aspecto importante de esta teoría es que no solo nos permite valuar el derivado sino que tambièn nos describe como construir un portafolio dinàmico, que consta ùnicamente del bono B y activo subyacente S, y que nos replica el precio del derivado. Esto es, en la pràctica, una opciòn europea se puede replicar mediante un portafolio que consta ùnicamente del bono B y del activo subyacente o activo con riesgo S.

Para una descripción más detallada sobre el planteamiento del problema los invitamos a visitar esta historia en Medium.

El modelo de mercado

Antes de definir el portafolio de inversión comencemos por asumir que en el mercado únicamente tenemos dos tiempos: el presente $t = 0$ y el futuro $t = 1$ y además sólo contamos con dos activos:

1. Activo sin riesgo o bono B
2. Activo con riesgo o subyacente S.

En particular la dinámica, en el tiempo, de los activos es

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \qquad & B_1 &= 1 + R \\ S_0 &= s, \qquad & S_1 &= \begin{cases} s \cdot u & \text{con probabilidad } p_u \\ s \cdot d & \text{con probabilidad } p_d \end{cases} \end{aligned}$$

en donde R se refiere al rendimiento que paga el bono en el periodo y $d = 1/u$.

Portafolios

Asumiremos que en este mercado las ventas en corto son permitidas y que no existen restricciones en el volumen comprado o vendido. En

$t=0$ podemos construir un portafolio $P=(x,y)$ de modo que x son las unidades del bono B e y representa las unidades del portafolio invertidas en el activo con riesgo S. Observemos que la dinámica del precio de este portafolio en el tiempo es

$$\begin{aligned} P_0 &= B_0 \cdot x + S_0 \cdot y \\ &= x + s \cdot y \end{aligned}$$

y en $t=1$

$$\begin{aligned} P_1 &= B_1 \cdot x + S_1 \cdot y \\ &= \begin{cases} (1+R)\cdot x + su \cdot y & \text{con probabilidad } p_u \\ (1+R)\cdot x + sd \cdot y & \text{con probabilidad } p_d \end{cases} . \end{aligned} \tag{O2.1}$$

Opciones europeas

Vamos a definir contratos de los que platicamos en la intrudicción, los cuales gracias a las hipótesis del mercado son conocidos como opciones europeas.

En $t=1$ el valor de dichos contratos son función $\Phi(\cdot)$ del subyacente S. Por ejemplo supongamos que para alguna constante K

$$\Phi(S) = \max(S-K, 0) \tag{O2.2}$$

o alternativamente

$$\Phi(S) = \max(K-S, 0).$$

En particular en $t=1$, tenemos que el contrato paga o vale

$$\Phi(S_1) = \begin{cases} \Phi(su) & \text{con probabilidad } p_u \\ \Phi(sd) & \text{con probabilidad } p_d \end{cases} . \tag{O2.3}$$

Replicación

Como ya lo habiamos mencionado anteriormente estamos en busca de un valor del contrato Φ en el tiempo cero, sin embargo antes de abordar este problema conviene pensar directamente en el portafolio financiero que replique su precio.

El día de hoy, esto es en $t=0$, podemos construir portafolios $P=(x,y)$ que repliquen el comportamiento de los contratos Φ a expiración $t=1$. Lo anterior se debe a que podemos igualar las ecuaciones (O2.1) y (O2.3) obtener

$$\begin{aligned} (1+R)\cdot x + su \cdot y &= \Phi(su) \\ (1+R)\cdot x + sd \cdot y &= \Phi(sd), \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{1+R}\frac{u\Phi(sd)-d\Phi(su)}{u-d} && (02.4)\\ y_0 &= \frac{\Phi(su)-\Phi(sd)}{su-sd}. && (02.5)\end{aligned}$$

Observación:

Concluimos que podemos replicar el valor del contrato Φ a expiración. En particular, en $t=0$, debemos comprar-vender x unidades del bono B y comprar-vender y unidades del subyacente S.

Costo de la estrategia que replica al contrato Φ.

Para poder replicar el valor del contrato Φ en $t = 1$, el día de hoy construimos un portafolio $P = (x, y)$ usando (02.4) y (02.5) respectivamente. Por lo que el costo de la estrategia en $t = 0$ es:

$$\begin{aligned} V &= x_0 + y_0 \cdot s \\ &= \frac{1}{1+R}\left[q_u\Phi(su) + q_d\Phi(sd)\right], && (02.6)\end{aligned}$$

en donde

$$q_u = \frac{(1+R)-d}{u-d} \qquad q_d = \frac{u-(1+R)}{u-d}. \tag{02.7}$$

Es decir:

$$V = \frac{1}{1+R}\left[\frac{(1+R)-d}{u-d}\Phi(su) + \frac{u-(1+R)}{u-d}\Phi(sd)\right]$$

Observación:

Notemos que si

$$d < (1+R) < u$$

las variables q_u y q_d, definidas en (02.7) describen una medida de probabilidad. Esto es cierto, porque en este caso $q_u, q_d > 0$ y

$$q_u + q_d = 1.$$

Esta medida de probabilidad es conocida como la medida de martingala o la medida riesgo-neutral. Esta medida también depende de la hipótesis de no-arbitraje para este tipo de problemas la cuál es una de las más importantes en matemáticas financieras.

Finalmente, observamos que el costo de la estrategia V expresada en (02.6), es el valor presente del pago esperado del contrato Φ. En donde el factor de descuento es $1/(1+R)$.

03 Ejemplo: acciones de Tesla

Parámetros

Usaremos el análisis anterior para valuar el costo de una estrategia que implique el precio de la acción de Tesla. No olvidemos que nuestro modelo es una simplificación de la realidad. Usaremos los siguientes parámetros

$$\begin{aligned} s &= 680 \\ u &= 1.20 \\ d &= 0.833 \\ R &= 0.0005 \text{ y} \\ K &= 700. \end{aligned}$$

Incremento en el precio. Mercado Bull

Ahora bien, supongamos que esperamos que el precio incremente en $t = 1$, usaremos una estrategia que por un lado acote nuestra pérdida en caso en que nuestra expectativa sea erronea y que maximice nuestra ganancia en el caso en que nuestra expectativa sea correcta. Lo anterior lo podemos lograr usando la siguiente función de pago a expiración:

$$\Phi(S) = \max(S - K, 0).$$

Dados los parámetros anterior, la dinámica de precios es:

$$B_0 = 1 \qquad B_1 = 1.0005$$
$$S_0 = 680 \qquad S_1 = \begin{cases} 816 \\ 566.66 \end{cases}$$

y por lo tanto a expiración el contrato Φ paga

$$\Phi(S_1) = \begin{cases} \max(816 - 700, 0) = 116 \\ \max(566.66 - 700, 0) = 0 \end{cases} . \tag{03.1}$$

Así mismo

$$y_0 = 0.465 \qquad x_0 = -263.505$$

y por lo tanto

$$V = 52.8586$$

Discusión:

Esto es, si queremos replicar la función de pago (03.2) en $t = 1$. El día de hoy debemos comprar 0.465 unidades de una acción de Tesla y vender en corto 263.505 bonos que regresaremos en $t = 1$. Sin embargo para comprar las unidades de Tesla necesarias $0.465 \cdot 680 = 316.3636$ no es suficiente la cantidad obtenida por la venta de corto de 263.505. Hace falta $0.4652406 \cdot 680 - 263.505 = 52.8586$ que es precisamente el costo de la estrategia.

Decremento en el precio. Mercado Bear

Ahora bien, supongamos que esperamos que haya un decremento en el precio en $t = 1$, usaremos una estrategia que por un lado acote nuestra pérdida en caso en que nuestra expectativa sea erronea y que maximice nuestra ganancia en el caso en que nuestra expectativa sea correcta. Lo anterior lo podemos lograr usando la siguiente función de pago a expiración:

$$\Phi(S) = \max(K - S, 0).$$

Dados los parámetros anterior, la dinámica de precios es:

$$B_0 = 1 \qquad B_1 = 1.0005$$
$$S_0 = 680 \qquad S_1 = \begin{cases} 816 \\ 566.66 \end{cases}$$

y por lo tanto a expiración el contrato Φ paga

$$\Phi(S_1) = \begin{cases} \max(700 - 816, 0) = 0 \\ \max(700 - 566.66, 0) = 133.33 \end{cases}. \tag{03.2}$$

Así mismo de (02.4) y (02.5), tenemos que

$$y_0 = -0.5347 \qquad x_0 = 436.14$$

y por lo tanto

$$V = 72.5495$$

Discusión:

Esto es, si queremos replicar la función de pago (03.2) en $t = 1$. El día de hoy debemos comprar 436.14 unidades del bono y vender en corto 0.5347 unidades de la acción de Tesla que regresaremos en $t = 1$. En caso que en $t = 1$, el precio de Tesla esté por debajo de 700USD, ganaremos 133.33. En particular el rendimiento de la estrategia sería:

$$\begin{aligned} R &= 133.33/72.5495 - 1 \\ &= 83.77\%. \end{aligned}$$

Comentario final:

Finalmente es importante recalcar que en este modelo simplificado es posible replicar exactamente el comportamiento del contrato Φ. Esta observación es la base de toda la teoría moderna de valuación de opciones ya que por un lado el vendedor de dichos instrumentos tiene la posibilidad de replicar su valor a expiración y por lo tanto elimina su riesgo. Por otro lado, este modelo se puede extender o modificar para que capture con mayor precisión el comportamiento de la realidad.